Corrigé Contrôle 29/03/2019

EXERCICE 1

Un distributeur de tomates est approvisionné par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de ce distributeur, le reste provenant, à parts égales, des deux autres producteurs.

Avant d'être conditionnées, les tomates sont calibrées par une machine qui les trie selon leur diamètre. Les tomates dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont conservées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 5 % des tomates fournies par le premier producteur sont hors calibre, 20 % des tomates fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des tomates fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les tomates livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les tomates est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit au hasard une tomate dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».
On note A_1, A_2, A_3 et C les évènements :

- A_1 : « la tomate prélevée provient du premier producteur » ;
- A_2 : « la tomate prélevée provient du deuxième producteur » ;
- A_3 : « la tomate prélevée provient du troisième producteur » ;
- C : « la tomate prélevée est de bon calibre ».

(Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $p(E)$ sa probabilité.

1. En utilisant les données de l'énoncé, complétons l'arbre donné en annexe.
2. Justifions que $p(A_2) = 0,15$.

   Nous savons que $p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$, en outre $p(A_2) = p(A_3)$. Par conséquent $0,7 + 2p(A_2) = 1$ d'où $p(A_2) = 0,15$.
3. La probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est notée

   $p(C \cap A_3)$. Or $p(C \cap A_3) = p(A_3) \times p_{A_3}(C) = 0,15 \times 0,96 = 0,144$.
4. Montrons que la probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre est égale à 0,929.

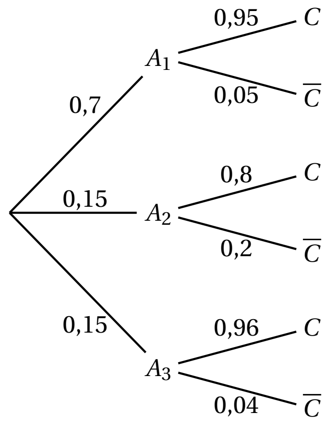
   $p(C) = p(A_1 \cap C) + p(A_2 \cap C) + p(A_3 \cap C) = p(A_1) \times p_{A_1}(C) + p(A_2) \times p_{A_2}(C) + p(A_3) \times p_{A_3}(C)$

   $p(C) = 0,7 \times 0,95 + 0,15 \times 0,8 + 0,15 \times 0,96 = 0,665 + 0,12 + 0,144 = 0,929$
5. La tomate prélevée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette tomate provient très probablement du deuxième producteur ».

   Calculons $p_{\overline{C}}(A_2) = \dfrac{p\left(A_2 \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,15 \times 0,2}{1 - 0,929} \approx 0,4225$.

   Pour comparer calculons $p_{\overline{C}}(A_1) = \dfrac{p\left(A_1 \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,7 \times 0,05}{1 - 0,929} \approx 0,4930$.

   Par conséquent le contrôleur a tort, elle provient plus probablement du premier producteur.

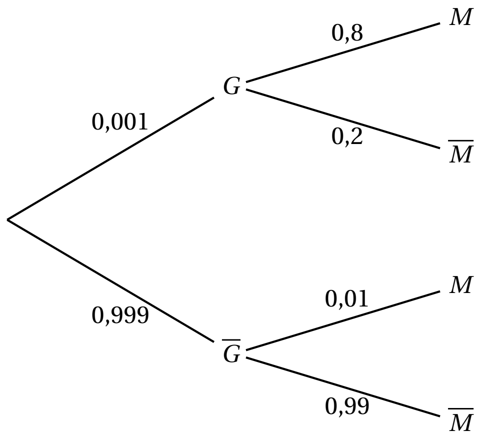


EXERCICE 2

On a prouvé qu'une des origines d'une maladie était génétique. On estime que 0,1 % de la population est porteur du gène en cause. Lorsqu'un individu est porteur du gène, on estime à $0,8$ la probabilité qu'il développe la maladie. Mais s'il n'est pas porteur du gène il y a tout de même une probabilité de $0,01$ qu'il développe la maladie.
Lorsqu'un individu est choisi au hasard dans la population, on considère les évènements suivants :

- G : « le patient est porteur du gène » ;
- M : « le patient développe la maladie ».

1. En utilisant les données, l'arbre est complété sur l' **annexe à rendre avec la copie** .
2. La probabilité de l'évènement « le patient est porteur du gène et il développe la maladie » est notée $p(G \cap M)$.
   $p(G \cap M) = p(G) \times p_G(M) = 0{,}001 \times 0{,}8 = 0{,}000\,8$.
3. La probabilité qu'il soit porteur du gène sachant qu'il a développé la maladie est notée $p_M(G)$.
   $p_M(G) = \dfrac{p(G \cap M)}{p(M)}$. Calculons alors $p(M)$.
   $p(M) = p(G) \times p_G(M) + p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(M) = 0{,}008 + 0{,}999 \times 0{,}01 = 0{,}101\,9$
   $p_M(G) = \dfrac{0{,}000\,8}{0{,}101\,9} \approx 0{,}074\,1$.
   La probabilité qu'il soit porteur du gène sachant qu'il a développé la maladie est à 0,000 1près 0,074 1.


0,001
0,999
G
$\overline{G}$
0,8
0,2
0,01
0,99
M
$\overline{M}$
M
$\overline{M}$