Corrigé du baccalauréat STMG Pondichéry 25 avril 2017

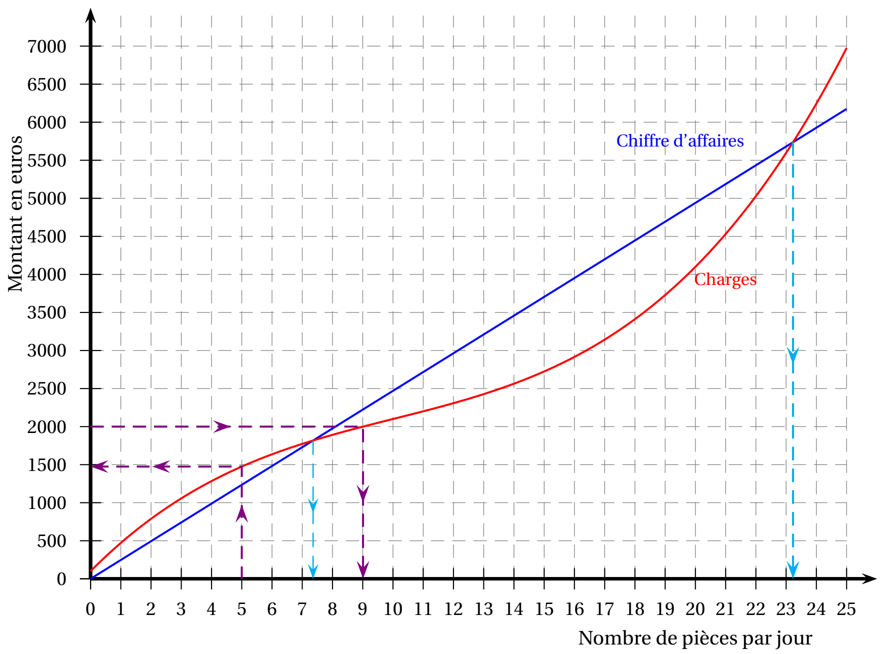
EXERCICE 3

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Partie A : Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondons aux questions suivantes :

1. Le montant des charges pour 5 pièces produites par jour est d'environ 1 500 euros. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe représentative de C d'abscisse 5.
2. Pour connaître combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2 000 euros, nous traçons la droite d'équation $y = 2000$ et nous lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de C.
   Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons 9.
   La production de 9 pièces entraîne un coût d'environ 2 000 euros.
3. Les quantités produites par jour permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice sont les valeurs pour lesquelles la courbe représentant la recette est « au-dessus » de celle représentant les coûts c'est-à-dire les valeurs comprises entre les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de C et celle représentant la recette.
   Nous lisons les abscisses des points d'intersection environ 7,4 et 23,2.
   Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice lorsque les quantités produites appartiennent à l'intervalle $[8\,;\,23]$.



Partie B : Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Le bénéfice étant égal à la différence entre les recettes et les coûts, nous avons donc $B(x) = 247x - C(x)$.
   $B(x) = 247x - (x^3 - 30x^2 + 400x + 100) = -x^3 + 30x^2 + (247 - 400)x - 100$
   L'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ est bien : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.
2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Calculons $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,25]$.
   $B'(x) = -(3x^2) + 30(2x) - 153 = -3x^2 + 60x - 153$
3. Justifions le tableau suivant :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Étudions le signe de $B'(x)$.
   $(x-3)(x-17) = x^2 - 17x - 3x + 51 = x^2 - 20x + 51$,

   $-3(x-3)(x-17) = -3x^2 + 60x - 153 = B'(x)$,

4. Étudions les variations de B.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I
   $B'(x) > 0$ sur $]3\,;\,17[$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I
   $B'(x) < 0$ sur $]0\,;\,3[$ ou sur $]17\,;\,25]$ par conséquent la fonction B est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.
   Dressons le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

x	0		3		17		25
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de B	-100	$\searrow$	-316	$\nearrow$	1 056	$\searrow$	-800

5. Le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal est 17, la fonction B admettant en 17 un maximum local. Ce bénéfice maximal vaut alors 1 056 euros.